

Introduction à la méthode des EF

Cours 2 : formulations fortes et faibles,
formulation de Galerkin et éléments finis
de degré 1

Introduction à la méthode des EF

Cours 2: On reprends le pb de la corde suspendue sur 2 appuis

Considérons le problème suivant : étant donné deux fonctions c et f continues sur l'intervalle $[0, 1]$, trouver une fonction u deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

(Pb 10.1 dit pb fort)

On multiplie par une fonction v une fois continuellement dérivable sur $[0, 1]$ et on intègre de 0 à 1:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Introduction à la méthode des EF

En intégrant par parties le premier terme, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx \\ = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

Si nous imposons à la fonction v d'être nulle en $x = 0$ et $x = 1$, alors nous en déduisons l'égalité :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (10.9)$$

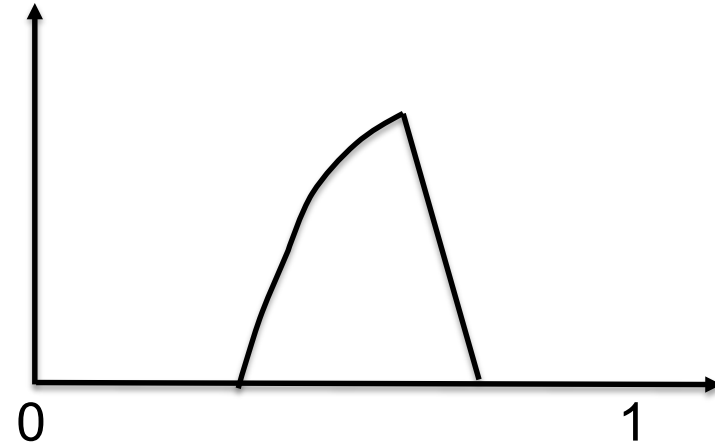
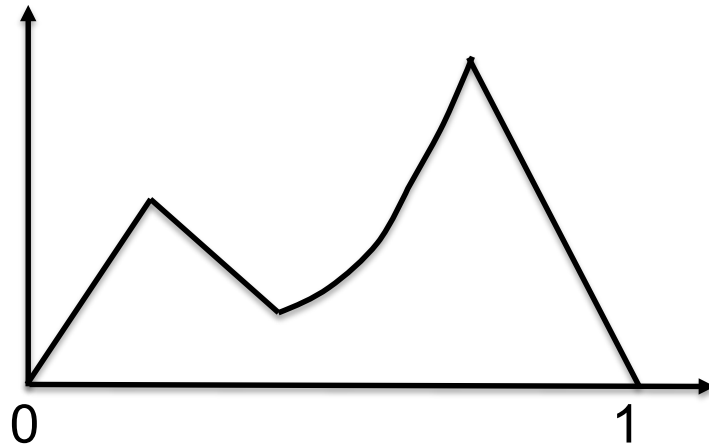
Introduction à la méthode des EF

Définition de l'espace vectoriel V :

V est l'ensemble de toutes les fonctions g continues, de première dérivée g' continue par morceaux et telles que $g(0)=g(1)=0$.

g' est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points de $[0,1]$ ou g' n'existe pas mais possède des limites à gauche à droite.

La somme de 2 fonctions de V reste un élément de V et le produit d'une fonction g par un nombre réel aussi: V est bien un e.v.



Deux fonctions appartenant à l'ev V . (NB: V est de dimension infinie)

Introduction à la méthode des EF

Nous cherchons u dans V telle que pour tout v de V , nous avons

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (\text{Pb 10.9})$$

Le problème 10.9 (Pb 10.9) est appelé problème faible ou formulation variationnelle.

Le problème faible ne fait intervenir que $u'(x)$ alors que le pb fort fait intervenir $u''(x)$: les solutions du pb faible sont moins régulières que celles du pb fort.

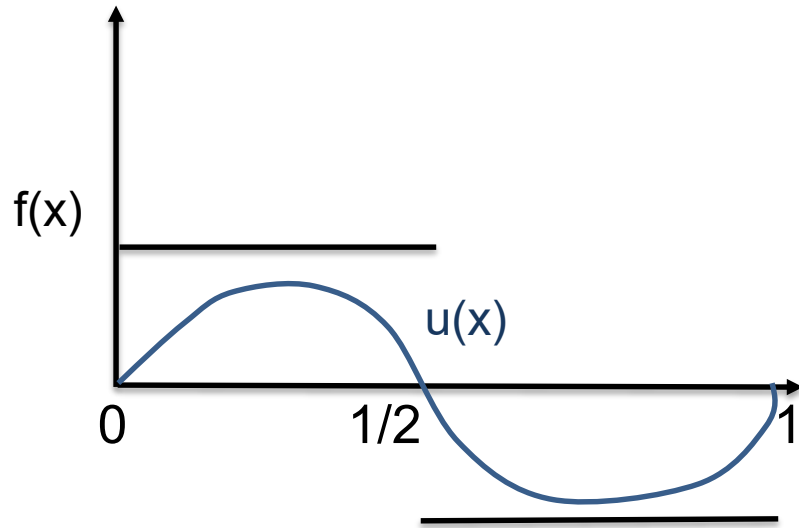
Toute solution du pb fort est solution du pb faible.

De plus, on montre que si $c(x) \geq 0$ sur $[0,1]$ alors le pb faible a une et une seule solution qui est celle du pb fort.

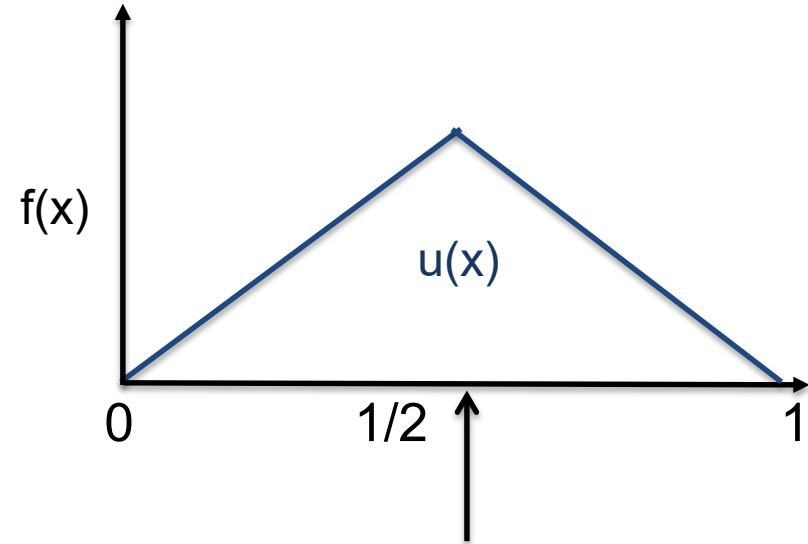
Introduction à la méthode des EF

Inversement, toute solution du pb faible (Pb 10.9) n'est pas forcément solution du problème fort (Pb 10.1):

voici 2 exemples: u est solution du pb faible mais pas du pb fort car $f(x)$ ou $u''(x)$ n'existe pas en $1/2$



f n'est pas continue en $1/2$



u'' n'existe pas en $1/2$.

Introduction à la méthode des EF

La méthode de Galerkin est basée sur la formulation faible du pb. alors que la méthodes des différences finies est basée sur la formulation forte.

Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sont N fonctions linéairement indépendantes de V , on peut construire un sous-espace vectoriel de V , noté V_h , engendré par les combinaisons linéaires des fonctions φ_i . Ainsi V_h sera l'ensemble de toutes les fonctions g qui peuvent s'exprimer sous la forme

$$g(x) = \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(x),$$

où les g_i sont N nombres réels.

NB: l'espace vectoriel V_h (ou V_N) est de dimension finie au contraire de l'ev V qui lui est de dimension infinie.

Introduction à la méthode des EF

Le pb faible revient à trouver une approximation de u notée $u_h \in V_h$ telle que

$$\int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx + \int_0^1 c(x) u_h(x) v_h(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad (10.10)$$

pour toute fonction $v_h \in V_h$. On dira que (10.10) est une *approximation de Galerkin* de (10.9).

Puisque $u_h \in V_h$, on peut écrire:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x),$$

où $u_1, u_2, \dots, u_N$ sont N nombres réels à déterminer.

(10.10) doit être vérifiée pour tout $v_h \in V_h$: il faut et il suffit que (10.10) soit vérifiée pour tous les φ_j de la base de V_h , ce qui donne les N équations:

$$\sum_{i=1}^N u_i \left(\int_0^1 \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx + \int_0^1 c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \right) = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx \quad (10.11)$$

Introduction à la méthode des EF

On définit la matrice carrée $N \times N$ notée A par:

$$A_{ji} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx + \int_0^1 c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad (10.12)$$

(dans le cas où $c = 0$, la matrice A est appelée *matrice de rigidité*), si $\vec{u}$ est le N -vecteur de composantes $u_1, u_2, \dots, u_N$ et si $\vec{f}$ est le N -vecteur dont la j^e composante est

$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad (10.13)$$

alors les problèmes (10.10) ou (10.11) sont équivalents à chercher $\vec{u}$ tel que

$$A\vec{u} = \vec{f}. \quad (10.14)$$

Le pb (10.14) est une discrétisation du problème fort (10.1).

La méthode de Galerkin, tout comme celle des différences finies, requiert la résolution d'un système linéaire.

Introduction à la méthode des EF

La méthode des éléments finis est une méthode de Galerkin.

Elle est basée sur un choix judicieux des fonctions de base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ de V_h de sorte que:

- la matrice A soit une matrice creuse par exemple une matrice bande car il existe des méthodes numériques bien adaptées pour l'inverser,
- la solution u_h converge, dans un certain sens, vers la solution du pb faible lorsque le nombre N de fonctions de base de V_h augmente.

NB: Lorsque la dimension de V_h , N , augmente, V_h «tend» vers l'espace vectoriel V .

Une méthode de Galerkin: la méthode
des éléments finis de degré 1.

Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis de degré 1.

On part de la méthode de Galerkin qui consiste à chercher u_h dans V_h telle que

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx + \int_0^1 c(x)u_h(x)v_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx \quad (10.10)$$

pour toute fonction $v_h \in V_h$.

;

Avec des fonctions d'interpolation linéaire, la méthode est dite de degré 1.

Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en $N + 1$ parties (N étant un entier positif) et posons $h = 1/(N + 1)$, $x_i = ih$ avec $i = 0, 1, 2, \dots, N + 1$, comme dans la figure 10.3. On définit, pour $i = 1, 2, \dots, N$, les fonctions suivantes :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1}. \end{cases} \quad (10.18)$$

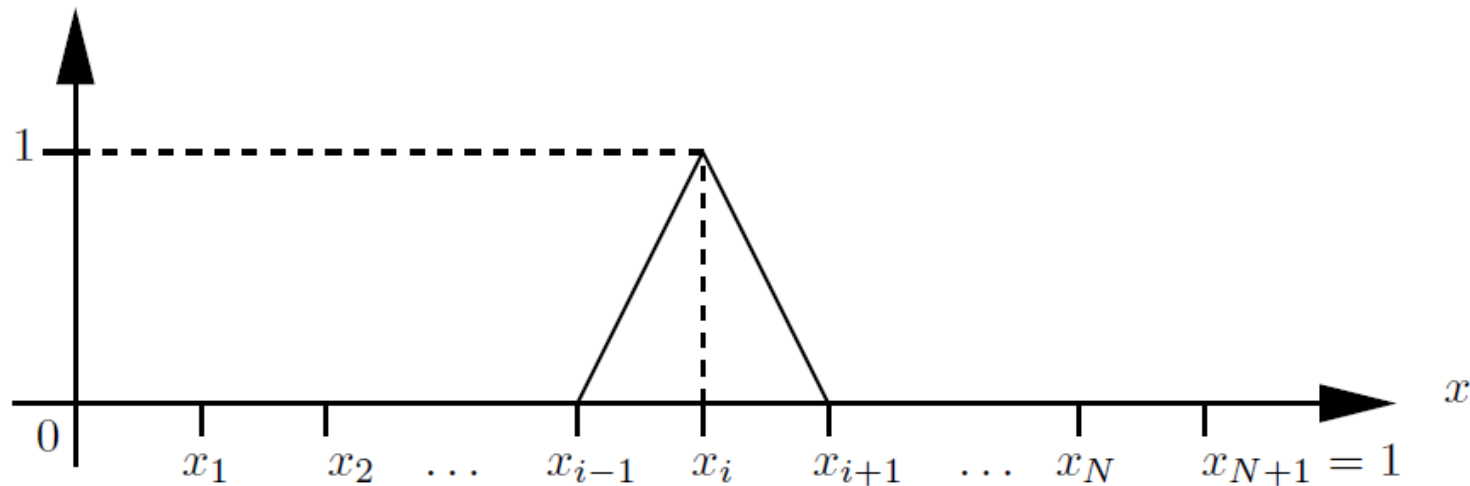
Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis de degré 1.

Les N fonctions $\varphi_i(x)$ appartiennent à V , e.v. (espace vectoriel) des fonctions à dérivées continues par morceaux. Elles sont linéairement indépendantes et forment donc une base discrète de V_h de dimension N ($h = 1/(N+1)$).

Les N fonctions $\varphi_i(x)$ sont telles que:

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq j \leq N+1,$$

$\varphi_i|_{[x_{j-1}, x_j]}$ est un polynôme de degré un, $1 \leq j \leq N+1$.

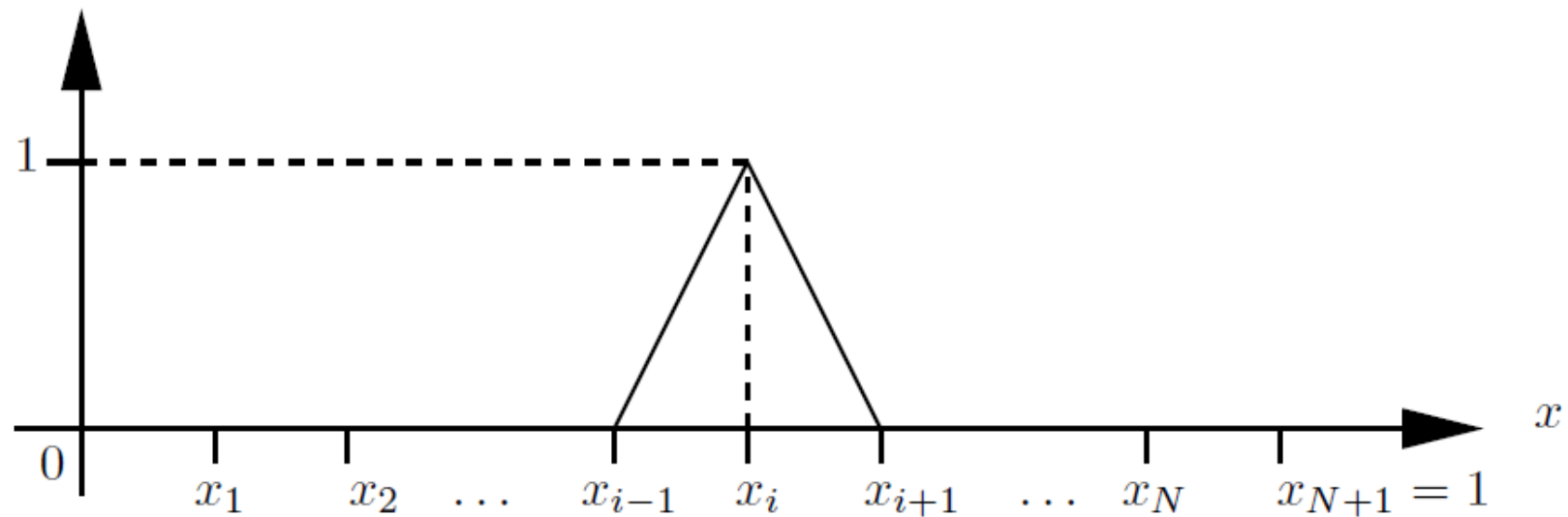


Fonction $\varphi_i(x)$ centrée en x_i (appelée fonction chapeau)

Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

Nous définissons:

- $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$ sont les *nœuds de la discrétisation*,
- $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_N, x_{N+1}]$ sont les *éléments géométriques*,
- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sont les fonctions de base du sous-espace V_h de type *éléments finis de degré 1* associées aux nœuds intérieurs $x_1, x_2, \dots, x_N$.

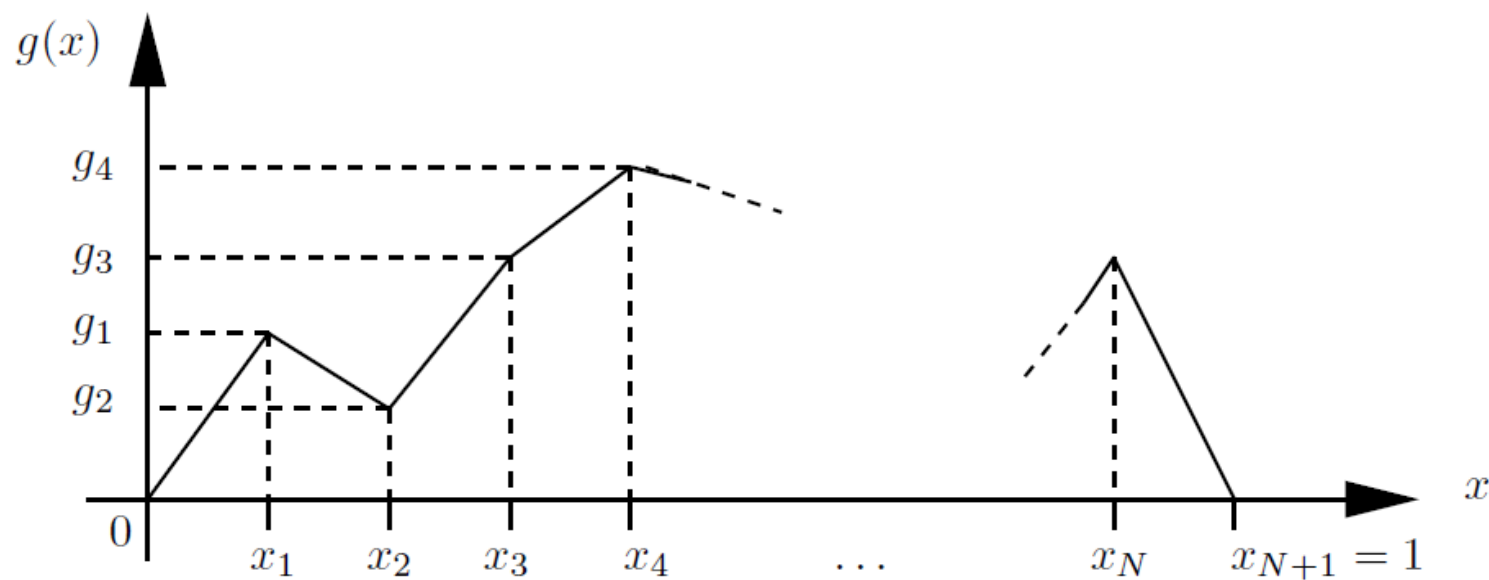


Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis de degré 1.

Si $g \in V_h$, alors g est une combinaison linéaire des φ_i , i.e.

$$g(x) = \sum_{i=1}^N g_i \varphi_i(x),$$

et le graphe de g est représenté dans la figure 10.5. En particulier, nous remarquons, en vertu de (10.19), que $g(x_j) = g_j$, $1 \leq j \leq N$, que $g(0) = g(1) = 0$ et que g est une fonction affine sur chaque élément géométrique.



Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis de degré 1.

Formulation faible du pb: trouver u tel que pour tout v de V :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \quad (10.9)$$

Approximation de Galerkin: trouver u_h de V_h tel que pour tout v_h de V_h :

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx + \int_0^1 c(x)u_h(x)v_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx \quad (10.10)$$

On munit l'espace V de la norme $|g|_1$ pour les fonctions à dérivée de carré sommable:

$$|g|_1 = \left(\int_0^1 (g'(x))^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{si } g \in V.$$

Théorème 10.3 *On suppose que $c(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$. Soit u la solution de (10.9) et soit u_h la solution de (10.10) lorsque V_h est engendré par les fonctions de base (10.18). Alors nous avons l'estimation d'erreur :*

$$|u - u_h|_1 \leq Ch, \quad (10.22)$$

où C est une constante indépendante de N (et donc de h).

Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

La discrétisation par la méthode de Galerkin requiert la résolution d'un système linéaire du style:

$$A\vec{u} = \vec{f}.$$

$$A_{ji} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx + \int_0^1 c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx,$$

pour $1 \leq i, j \leq N$, ainsi que les composantes

$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N.$$

Nous vérifions que

$$\int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \begin{cases} 2/h & \text{si } i = j, \\ -1/h & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (10.23)$$

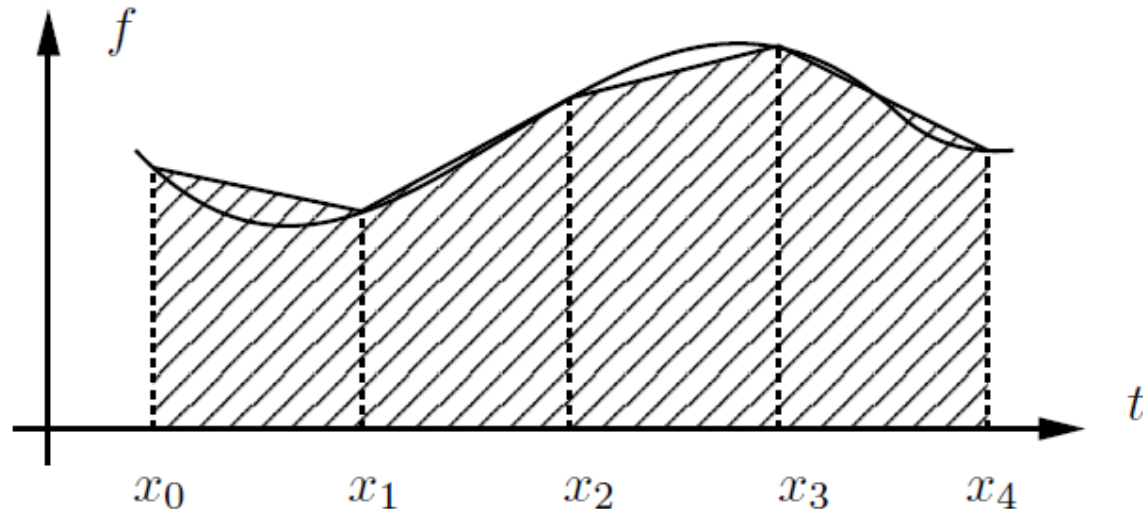
Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

valeurs de $\int_0^1 c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx$ et de $\int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx$,

Intégration numérique par la formule composite du trapèze:

$$L_h(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right). \quad (3.13)$$

La formule (3.13) est facile à interpréter graphiquement : la quantité $L_h(f)$ correspond à l'aire hachurée de la figure 3.2.



Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

Intégration numérique par la formule composite du trapèze avec $h = \text{constant}$

$L_h(l) \simeq \int_0^1 l(x) dx$ est donnée par:

$$L_h(\ell) = h \left(\frac{1}{2} \ell(x_0) + \ell(x_1) + \ell(x_2) + \cdots + \ell(x_N) + \frac{1}{2} \ell(x_{N+1}) \right).$$

Nous vérifions aisément que

$$L_h(c\varphi_i\varphi_j) = \begin{cases} hc(x_j) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad (10.24)$$

et

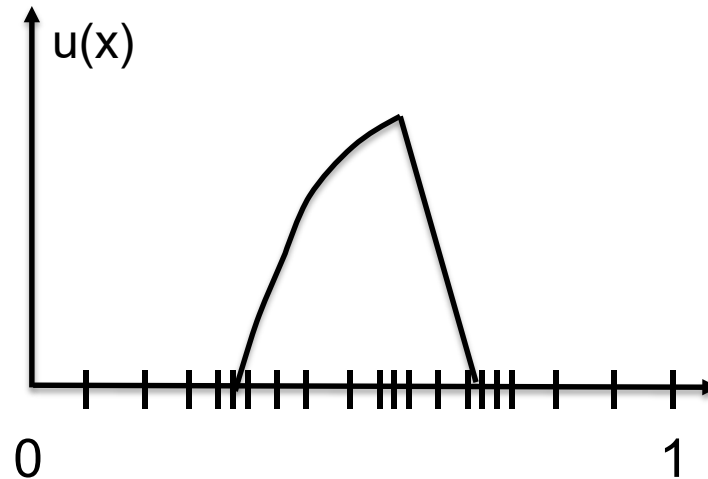
$$L_h(f\varphi_j) = hf(x_j). \quad (10.25)$$

Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

Nous obtenons un système linéaire identique à $1/h$ près à celui obtenu par la méthode des différences finies (cf. exo 2a)

Cependant, contrairement à la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis est très souple et se laisse facilement généraliser aux situations décrites ci-dessous.

Lorsque la distribution des points de discrétisation $(x_j)_{1 \leq j \leq N}$ n'est pas uniforme, les fonctions φ_i peuvent toujours être définies par (10.18). Ainsi, en concentrant les nœuds aux endroits de forte variation de la solution, les fonctions φ_i peuvent engendrer un sous-espace V_h de fonctions mieux adaptées au problème considéré.



Affinage local du maillage, là où u varie fortement

Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

Exo2a: Considérons le problème suivant : étant donné deux fonctions c et f continues sur l'intervalle $[0, 1]$, trouver une fonction u deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Vérifiez les 3 formules suivantes pour les fonctions linéaires de degré 1 (chapeau) avec $h = 1/(N+1)$, $N > 0$

$$\int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \begin{cases} 2/h & \text{si } i = j, \\ -1/h & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

$$L_h(c\varphi_i\varphi_j) = \begin{cases} hc(x_j) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$$L_h(f\varphi_j) = hf(x_j).$$

Ecrire le système matriciel à résoudre sous la forme: $A\vec{u} = \vec{f}$.

Et montrer que ce système est identique à celui des différences finies.

Exo2b:

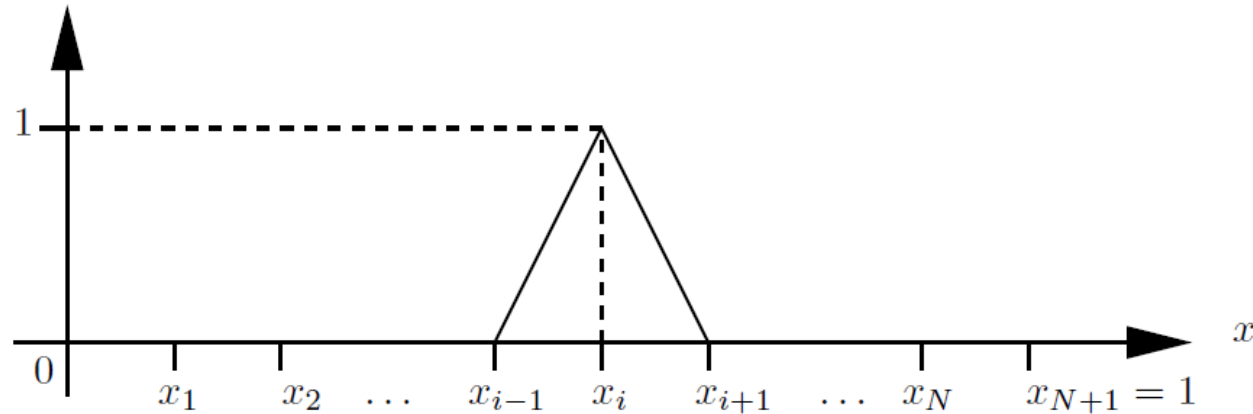
Eléments finis 1D de degré 1

Soit f une fonction continue de $[0.,1]$ dans $\mathbb{R}$. On cherche u de $[0.,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$-\frac{d}{dx} \left((1+x) \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1$$

$$\text{et } u(0) = u(1) = 0.$$

1. Donnez une formulation faible du problème (ne pas développer la première dérivée)
2. Appliquez la méthode de Galerkin de degré 1 (fonctions chapeau) en notant $h = 1/(N+1)$ et $x_j = jh$ avec $j = 0, 1, \dots, N+1$. Calculez les coefficients de la matrice A et écrire cette matrice pour $N = 4$.



Eléments finis 1D de degré 1

Exo2c:

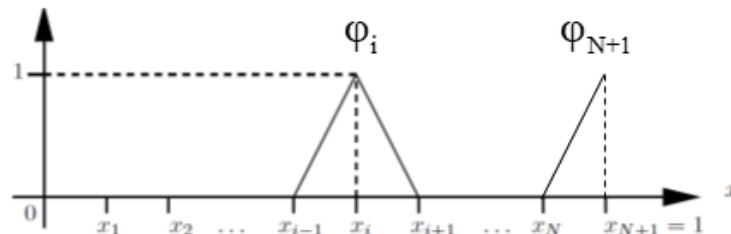
Soit f une fonction continue de $[0.,1]$ dans $\mathbb{R}$. On cherche u de $[0.,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$-\frac{d}{dx} \left((1+x) \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1 \quad \text{et } u(0) = 0 \quad \text{et } u'(1) = a$$

1. Donnez une formulation faible du problème (ne pas développer la première dérivée)
2. Appliquez la méthode de Galerkin de degré 1 (fonctions chapeau) en notant $h = 1/(N+1)$ et $x_j = jh$ avec $j = 0, 1, \dots, N+1$. Calculez les coefficients de la matrice A et écrire cette matrice pour $N = 3$. Comme la solution $u(x)$ n'est pas connue en $x = 1$, on définit en plus la fonction linéaire φ_{N+1} par :

$$\varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_N}{x_{N+1} - x_N} & \text{si } x_N \leq x \leq x_{N+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le graphe des fonctions φ_i pour $i=1,2, \dots, N, N+1$ est donc le suivant :



Cours 3:

éléments finis 1D de degré 2

problème elliptique et éléments finis 2D